



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, București, 8 februarie 2025

### CLASA a VII-a - Soluții și barem

**Problema 1** Se consideră suma

$$S = \frac{1}{(1+2^{-1})(1+2^2)} + \frac{1}{(1+2^{-2})(1+2^3)} + \cdots + \frac{1}{(1+2^{-2024})(1+2^{2025})}.$$

Arătați că  $[2025 \cdot S] < 675$ , unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real  $x$ .

autor: Mihaela Berindeanu, G.M. nr. 10/2024

*Soluție:* 
$$\frac{1}{(1+2^{-k})(1+2^{k+1})} = \frac{2^k}{(1+2^k)(1+2^{k+1})} = \frac{(2^{k+1}+1) - (2^k+1)}{(1+2^k)(1+2^{k+1})} = \frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{2^{k+1}+1} \dots\dots\dots 3p$$

Atunci 
$$S = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+1} - \frac{1}{2^4+1} + \cdots + \frac{1}{2^{2024}+1} - \frac{1}{2^{2025}+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{2025}+1} \dots\dots\dots 2p$$

Obținem  $2025 \cdot S = 675 - \frac{2025}{1+2^{2025}}$ , deci  $[2025 \cdot S] = 674 \dots\dots\dots 2p$

**Problema 2** Pentru orice două numere reale  $a$  și  $b$ , distincte și strict pozitive, definim mulțimea  $M(a; b) = \left\{ \frac{2ab}{a+b}; \sqrt{ab}; \frac{a+b}{2} \right\}$ .

- Determinați  $M(\sqrt{2026} - 45; \sqrt{2026} + 45)$ ;
- Aflați  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $M(45 - \sqrt{n}; 45 + \sqrt{n}) \subset \mathbb{N}$ ;

*Soluție:*

a)  $M(\sqrt{2026} - 45; \sqrt{2026} + 45) = \left\{ \frac{\sqrt{2026}}{2026}; 1; \sqrt{2026} \right\} \dots\dots\dots 3p$

b)  $a + b = 90, ab = 2025 - n$ , deci  $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2(2025-n)}{90} = \frac{2025-n}{45} \in \mathbb{N} \Rightarrow 45|n$ .  
 Deci  $n = 45 \cdot p, p \leq 45 \dots\dots\dots 1p$   
 $\sqrt{ab} = \sqrt{2025-n} \in \mathbb{N} \Rightarrow 2025-n = k^2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 45 \cdot (45-p) = k^2 \Rightarrow 5(45-p)$   
 pătrat perfect,  $\dots\dots\dots 1p$   
 de unde obținem  $p \in \{0, 25, 40, 45\}$ , deci  $n \in \{0, 1125, 1800, 2025\} \dots\dots\dots 1p$   
 Dar  $n = 0$  și  $n = 2025$  nu convin, deci  $n \in \{1125, 1800\} \dots\dots\dots 1p$

**Problema 3** Fie paralelogramul  $ABCD$ ,  $\{O\} = AC \cap BD$  și punctul  $M \in (AB)$ . Pe semidreapta  $(MO)$  considerăm punctul  $N$  astfel încât  $NO = 3MO$ . Demonstrați că:

- a) Paralela prin punctul  $B$  la dreapta  $DM$  trece prin mijlocul segmentului  $DN$ ;
- b) Punctele  $B, C, N$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $BM = 2AM$ .

*autor: Traian Preda*

*Soluție:*

- a) Notăm  $MN \cap CD = \{P\}$  și  $BP \cap ND = \{S\}$ .  $MB \parallel DP, BO = DO \Rightarrow MBPD$  paralelogram  $\Rightarrow BP \parallel DM$  și  $MO = OP$ . Cum  $NO = 3MO$  obținem  $NP = PM$ .  $PS \parallel DM \Rightarrow PS$  linie mijlocie în  $\triangle MDN \Rightarrow S$  este mijlocul lui  $DN$ . . . . . **3p**
- b) "  $\Rightarrow$  "  $PC$  linie mijlocie în  $\triangle MBN \Rightarrow PC = \frac{MB}{2}$ .  $AMCP$  paralelogram  $\Rightarrow PC = AM$ , deci  $BM = 2AM$  . . . . . **2p**  
"  $\Leftarrow$  " Notăm  $BN \cap DC = \{C'\}$ .  $P$  centru de greutate în  $\triangle BDN \Rightarrow DP = 2PC'$ .  
Dar  $DP = MB, AM = PC$  deci  $PC' = PC = \frac{MB}{2} \Rightarrow C = C'$ . Prin urmare, punctele  $B, N$  și  $C$  sunt coliniare. . . . . **2p**

**Problema 4** În rombul  $ABCD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$ , considerăm punctele  $M \in (BC)$ ,  $N \in (CD)$ , astfel încât  $BM = DN$ . Dacă  $AN \cap BD = \{P\}$  și  $BQ \perp AM, PR \perp AD$ ,  $Q \in (AM), R \in (AD)$ , demonstrați că:

- a) Punctele  $Q, O, R$  sunt coliniare;
- b) Dreptele  $BQ, AC$  și  $PR$  sunt concurente.

*autori: Bogdan Georgescu și Traian Preda*

*Soluție:*

- a)  $\triangle ABM \equiv \triangle ADN(L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle BAM = \sphericalangle DAN$  ..... **1p**  
 Patrulatele  $ABQO$  și  $AOPR$  sunt inscriptibile, de unde obținem  $\sphericalangle BOQ = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle PAR = \sphericalangle ROP$ , deci punctele  $Q, O, R$  sunt coliniare ..... **2p**
- b) Notăm  $BQ \cap AC = \{S\}, SD \cap AN = \{T\}. \triangle ABS \equiv \triangle ADS(L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle ABQ = \sphericalangle ADT$ . Cum  $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle DAT$ , obținem  $\sphericalangle ATD = \sphericalangle AQB = 90^\circ \Rightarrow AT \perp SD$ , deci punctul  $P$  este ortocentrul  $\triangle ASD$ . ..... **2p**  
 Atunci  $SP \perp AD$ , fiind a treia înălțime a triunghiului. Însă  $PR \perp AD$ , de unde obținem că  $S, P, R$  sunt coliniare  $\Rightarrow BQ \cap AC \cap PR = \{S\}$  ..... **2p**